לוגיקה מתמטית (1) – תרגיל 13

1.

א. נאמר שפונקציה n -מקומית מלאה (כלומר פונקציה המוגדרת עבור כל n -יה של מחרוזות) היא חשיבה אם יש אלגוריתם המחשב אותה. תארו בקצרה אלגוריתמים המחשבים את הפונקציות הבאות:

(i) בהינתן n מחרוזות $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, $J(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ הוא השרשור שלהן.

(ii) בהינתן מחרוזת ψ ,

$$\pi(\psi, i) = \begin{cases} \varphi_i & \text{אם } i < n \text{ מחרוזת והאיבר } i \text{ בשרשור הוא } \varphi_i \\ \langle \rangle & \text{אחרת} \end{cases}$$

ב. הראו שאם $R(x)$ יחס כריע ו- f פונקציה חשיבה אזי גם היחס $R(f(x_1, \dots, x_n))$ כריע.

ג. יהיו S_1, S_2 יחסים כריעים חיובית. הוכיחו כי גם $S_1 \cap S_2$ כריע חיובית.

ד. תהי T תורה כריעה (כלומר, T היא קבוצה עקבית של פסוקים כך שאוסף המחרוזות ב- T הוא קבוצה כריעה). הוכיחו שאוסף המסקנות הלוגיות של T (כלומר $\{\varphi : T \models \varphi\}$) כריעה חיובית. רמזים

(i) הראו שאם T סופית יש יחס עדות כריע R כך ש- $\exists x R_T(x, \varphi)$ אם $T \models \varphi$.

(ii) הראו שהיחס $R_T(x, z)$ האומר: " z היא זוג מחרוזות (z_1, z_2) כך ש- z_1 קבוצה סופית של מחרוזות מ- T ו- z_2 עד לכך ש- x הוא מסקנה לוגית של z_1 " הוא יחס כריע.

(iii) השתמשו במשפט הקומפקטיות כדי להראות שהיחס $\exists z R(x, z)$ הוא יחס העדות המבוקש.

ה. (רשות) הראו שאם T תורה כריעה חיובית אז קבוצת המסקנות הלוגיות של T כריעה חיובית.

ו. (רשות) פונקציה מלאה f תקרא כריעה אם היחס $(x, f(x))$ הוא יחס כריע. הראו שפונקציה מלאה f היא חשיבה אם היא כריעה. רמז: החלק הקשה הוא להראות ש- f כריעה גורר ש- f חשיבה. בהנתן x נסו לבדוק את כל האפשרויות ל- $f(x)$. הראו שהבדיקה הנדרשת תאריך זמן סופי (לשם כך השתמשו בעובדה ש- f שלמה).

2. נאמר שיחס R (פונקציה F) **אדיש(ה)** ליחס הדו-מקומי E אם

$$\forall x_1, \dots, \forall x_n \forall y_1, \dots, \forall y_n \left(\bigwedge_{i=1..n} E(x_i, y_i) \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow R(y_1, \dots, y_n)) \right)$$

$$\forall x_1, \dots, \forall x_n \forall y_1, \dots, \forall y_n \left(\bigwedge_{i=1..n} E(x_i, y_i) \rightarrow E(F(x_1, \dots, x_n), F(y_1, \dots, y_n)) \right)$$

בהתאמה.

א. האם הפונקציות $+$, אדישות ליחס השוויון מודולו 3.

ב. האם מי מן היחסים $<$, ושוויון מודולו 6 אדיש עבור היחס שוויון מודולו 3.

ג. האם היחס השוויון מודולו 3 אדיש ליחס השוויון מודולו 6.

3. נניח ש- E יחס חפיפה למבנה A . להשמות s, s' ל- A . הוכיחו שאם לכל x מתקיים $E(s(x), s'(x))$

אז לכל שם עצם t מתקיים $E(\text{val}(A, s, t), \text{val}(A, s', t))$, ולכל נוסחה

$$\text{val}(A, s, \varphi) = \text{val}(A, s', \varphi)$$

4. יחס $<$ על קבוצה I יקרא יחס סדר קווי (או מלא) אם הוא מקיים: $x < y \Leftrightarrow \neg(y < x)$ ו-1

$x < z \Rightarrow x < y \wedge y < z$. יחס סדר קווי על I יקרא סדר טוב, אם לכל $I' \subseteq I$ יש איבר

מזערי.

א. הוכיחו כי יחס הסדר הטבעי על N הוא סדר טוב. הוכיחו כי יחס הסדר הטבעי על Z איננו סדר טוב.

- ב. הוכיחו כי $<$ הוא סדר טוב על I אם אין ב- I סדרה אינסופית יורדת.
- ג. תהי L שפה לתחשיב היחסים המכילה לפחות את סימן היחס הדו-מקומי $<$ ותהי תורה T ב- L המכילה את אקסיומות הסדר. הראו שאם ל- T יש מודל אינסופי (אחד לפחות) אז יש לה מודל M שבו $<^M$ אינו סדר טוב. הדרכה:
- (i) הוסיפו לשפה אינסוף קבועים אישיים חדשים.
- (ii) כתבו קבוצת פסוקים Δ האומרת שהקבועים החדשים מהווים סדרה אינסופית יורדת.
- (iii) השתמשו בתרגיל 9, שאלה 4 ובמשפט הקומפקטיות כדי להראות ש- $\Delta \cup T$ עקבית.